

Online Class No. 01 (H.S. – II)

Continuity and Differentiability

Exercise 5.1

1. প্রমাণ কৰা যে $f(x) = 5x - 3$ ফলনটো $x = 0, x = -3$ আৰু $x = 5$ ত
অবিচ্ছিন্ন।

Solution :

দিয়া আছে, $f(x) = 5x - 3$

(i) $x = 0$ বিন্দুত :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (5x - 3) = 5.0 - 3 = -3$$

$$f(0) = 5.0 - 3 = -3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$\therefore x = 0$ বিন্দুত প্রদত্ত ফলনটো অবিচ্ছিন্ন।

(ii) $x = -3$ বিন্দুত :

$$\lim_{x \rightarrow (-3)} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-3)} (5x - 3) = 5.(-3) - 3 = -18$$

$$f(-3) = 5.(-3) - 3 = -18$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow (-3)} f(x) = f(-3)$$

$\therefore x = -3$ বিন্দুত প্রদত্ত ফলনটো অবিচ্ছিন্ন।

(iii) $x = 5$ বিন্দুত :

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} (5x - 3) = 5.5 - 3 = 22$$

$$f(5) = 5.5 - 3 = 22$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5)$$

$\therefore x = 5$ বিন্দুত প্রদত্ত ফলনটো অবিচ্ছিন্ন।

2. $f(x) = 2x^2 - 1$ ফলনৰ $x = 3$ ত অবিচ্ছিন্ন পৰীক্ষা কৰা।

Solution : দিয়া আছে, $f(x) = 2x^2 - 1$

$x = 3$ বিন্দুত :

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 1) = 2 \cdot 3^2 - 1 = 17$$

$$f(3) = 2 \cdot 3^2 - 1 = 17$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

$\therefore x = 3$ বিন্দুত প্রদত্ত ফলনটো অবিচ্ছিন্ন।

3. তলৰ ফলনবোৰৰ অবিচ্ছিন্নতা পৰীক্ষা কৰা।

(a) $f(x) = x - 5$

(b) $f(x) = \frac{1}{x-5}, x \neq 5$

(c) $f(x) = \frac{x^2-25}{x+5}, x \neq -5$

(d) $f(x) = |x - 5|$

Solution :

(a) দিয়া আছে, $f(x) = x - 5$

যদি x এটা বাস্তৱ সংখ্যা হয় তেন্তে $f(x)$ ফলনটো প্ৰতিটো বাস্তৱ সংখ্যাৰ বাবেই সংজ্ঞাৱদ্ধ।

ধৰাহল, $x = c$, এটা বাস্তৱ সংখ্যা।

$$\therefore \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} (x - 5) = c - 5$$

$$f(c) = c - 5$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

$\therefore f(x)$ ফলনটো প্ৰতিটো বাস্তৱ সংখ্যাতেই অবিচ্ছিন্ন। গতিকে প্ৰদত্ত ফলনটো অবিচ্ছিন্ন।

(b) দিয়া আছে, $f(x) = \frac{1}{x-5}, x \neq 5$

যদি x এটা বাস্তৱ সংখ্যা হয় তেন্তে 5 ক বাদ দি $f(x)$ ফলনটো প্ৰতিটো বাস্তৱ সংখ্যাৰ বাবেই সংজ্ঞাৱদ্ধ।

ধৰাহল, $x = c$, এটা বাস্তৱ সংখ্যা আৰু $c \neq 5$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{1}{x-5} \right) = \frac{1}{c-5}$$

$$f(c) = \frac{1}{c-5}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

$\therefore f(x), x \neq 5$ ফলনটো প্ৰতিটো বাস্তৱ সংখ্যাতেই অবিচ্ছিন্ন। গতিকে প্ৰদত্ত ফলনটো অবিচ্ছিন্ন।

(c) দিয়া আছে, $f(x) = \frac{x^2-25}{x+5}, x \neq -5$

যদি x এটা বাস্তৱ সংখ্যা হয় তেন্তে -5 ক বাদ দি $f(x)$ ফলনটো প্ৰতিটো বাস্তৱ সংখ্যাৰ বাবেই সংজ্ঞাৱদ্ধ।

ধৰাহল, $x = c$, এটা বাস্তৱ সংখ্যা আৰু $c \neq -5$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{x^2-25}{x+5} \right) = \lim_{x \rightarrow c} \left\{ \frac{(x+5)(x-5)}{x+5} \right\} = \lim_{x \rightarrow c} (x-5)$$

$$= c - 5$$

$$f(c) = \frac{c^2-25}{c+5} = \frac{(c+5)(c-5)}{c+5} = c - 5$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

$\therefore f(x), x \neq -5$ ফলনটো প্ৰতিটো বাস্তৱ সংখ্যাতেই অবিচ্ছিন্ন। গতিকে প্ৰদত্ত ফলনটো অবিচ্ছিন্ন।

(d) দিয়া আছে, $f(x) = |x - 5|$

$$\text{সংজ্ঞানুসৰি } f(x) = |x - 5| = \begin{cases} 5 - x, & \text{যদি } x < 5 \\ x - 5, & \text{যদি } x \geq 5 \end{cases}$$

$f(x)$ ফলনটো বাস্তৱ সংখ্যাৰ ৰেখাৰ প্ৰতিটো বিন্দুতেই সংজ্ঞাৱদ্ধ।

ধৰাহল, c বাস্তৱ সংখ্যাৰ ৰেখাৰ যিকোনো এটা বিন্দু।

গতিকে $c < 5$ বা $c = 5$ বা $c > 5$.

প্ৰথম চৰ্ত: $c < 5$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} (5 - x) = 5 - c$$

$$f(c) = 5 - c$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) = 5 - c$$

$\therefore f(x)$ ফলনটো 5 তকৈ সৰু প্ৰতিটো বাস্তৱ সংখ্যাতেই অবিচ্ছিন্ন।

দ্বিতীয় চৰ্ত: $c = 5$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} (x - 5) = c - 5$$

$$f(c) = c - 5$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) = c - 5$$

$\therefore c = 5$ অৰ্থাৎ $x = 5$ বিন্দুত $f(x)$ ফলনটো অবিচ্ছিন্ন।

তৃতীয় চৰ্ত: $c > 5$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} (x - 5) = c - 5$$

$$f(c) = c - 5$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) = c - 5$$

$\therefore f(x)$ ফলনটো 5 তকৈ ডাঙৰ প্ৰতিটো বাস্তৱ সংখ্যাতেই অবিচ্ছিন্ন।
গতিকে প্ৰদত্ত ফলনটো অবিচ্ছিন্ন।