টোকা-3

অনুকলনৰ আৰু কিছু সূত্ৰ:

(1) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + C$

প্ৰমাণঃ আমি জানো যে,

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

এতেকে $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + C$

(2) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\cos^{-1} x + C$

প্ৰমাণঃ আমি জানো যে,

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

এতেকে $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\cos^{-1} x + C$

[*ওপৰৰ দুয়োটা সূত্ৰৰ পৰা,* $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + C$

$= -\cos^{-1} x + C$]

[<u>তলৰ চাৰিটা সূত্ৰ নিজে প্ৰমাণ কৰিবলৈ চেষ্টা কৰা</u>]

(3) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + C$

(4) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = -\cot^{-1} x + C$

[*ওপৰৰ দুয়োটা সূত্ৰৰ পৰা,* $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + C$

$= -\cot^{-1} x + C$]

(5) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + C$

(6) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = -\mathrm{cosec}^{-1} x + C$

[*ওপৰৰ দুয়োটা সূত্ৰৰ পৰা,* $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + C$

$= -\mathrm{cosec}^{-1} x + C$]

<u>অনুকলনৰ পদ্ধতি (Methods of Integration):</u>

কোনো এক ফলনৰ অনুকলন উলিয়াবলৈ কিছু পদ্ধতিৰ প্ৰয়োগ কৰা হয়। তেনে তিনিটা পদ্ধতিৰ বিষয়ে এতিয়া আলোচনা কৰিম।

(ক) <u>প্ৰতিষ্ঠাপন পদ্ধতি (Method of substitution):</u>

এই পদ্ধতিত অনুকলনৰ সুবিধাৰ্থে অনুকলনৰ চলক সলনি কৰা হয়। তাৰ বাবে নতুন আৰু পুৰণা চলকৰ মাজত সুবিধা হোৱাকৈ এটা ফলনীয় সম্পৰ্ক ধৰি লোৱা হয়।

ধৰা হওক, $\int f(x)dx$ নিৰ্ণয় কৰিব লাগে। অনুকলনৰ সুবিধা হোৱাকৈ ধৰাহওক, $x = g(z)$ এটা x আৰু z মাজৰ ফলনীয় সম্পৰ্ক। তেন্তে অৱকল লৈ পাওঁ $dx = g'(z)dz$ ।
গতিকে

$$\int f(x)dx = \int fg(z)g'(z)dz$$

এই অনুকলনটো উলিওৱাত যদি একো অসুবিধা নহয়, তেন্তে আমি এই পদ্ধতিৰ সহায় লওঁ।
[ইয়াত $fg(z) = f\{g(z)\}$]

Ex. নিৰ্ণয় কৰা।

(i) $\int \frac{2x}{1+x^2} dx$ **(ii)** $\int \frac{(\log x)^2}{x} dx$ **(iii)** $\int \sin x \sin(\cos x)\, dx$

(iv) $\int \sqrt{ax+b}\, dx$ **(v)** $\int (4x+2)\sqrt{x^2+x+1}\, dx$

(vi) $\int \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2}\, dx$ **(vii)** $\int \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}\, dx$ **(viii)** $\int \text{ta}\ ^2(2x-3)\, dx$

(ix) $\int \cot x \log \text{si}\ \ dx$ **(x)** $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x}\, dx$

Sol^n:

(i)

$$\int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$= \int \frac{2x\, dx}{1+x^2}$$

$$= \int \frac{dz}{z}$$

ধৰাহওক,

$z = 1 + x^2$

$\Rightarrow dz = 2x\, dx$

$= \log z + C$

$= \log\ (1 + x^2) + C$

(ii)

$$\int \frac{(\log x)^2}{x} dx$$

$= \int (\log x)^2 \frac{1}{x} dx$

$= \int z^2 dz$

$= \frac{z^3}{3} + C$

$= \frac{(\log x)^3}{3} + C$

ধৰাহওক,

$z = \log x$

$\Rightarrow dz = \frac{1}{x}\ dx$

(iii)

$$\int \sin x \sin(\cos x)\, dx$$

$= \int \sin(\cos x)\ (\sin x\, dx)$

$= \int \sin z\ \ (-dz)$

$= -\int \sin z\ \ dz$

$= -(-\cos z) + C$

$= \cos z + C$

$= \cos(\cos x) + C$

ধৰাহওক,

$z = \cos x$

$\Rightarrow dz = -\sin x\, dx$

$\Rightarrow -dz = \sin x\, dx$

(iv)

$$\int \sqrt{ax + b}\, dx$$

$= \int \sqrt{z}\ \left(\frac{1}{a}\ dz\right)$

ধৰাহওক,

$z = ax + b$

$\Rightarrow dz = a\, dx$

$\Rightarrow dx = \frac{1}{a}\ dz$

$$= \frac{1}{a}\int \sqrt{z}\ dz$$

$$= \frac{1}{a}\int z^{\frac{1}{2}}\ dz$$

$$= \frac{1}{a}\ \frac{z^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{1}{a}\ \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3a}\ z^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3a}\ (ax+b)^{\frac{3}{2}} + C$$

(v)

$$\int (4x+2)\sqrt{x^2+x+1}\ dx$$

$$= \int 2(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}\ dx$$

$$= \int 2\sqrt{x^2+x+1}\ (2x+1)dx$$

$$= \int 2\sqrt{z}\ dz$$

$$= 2\int z^{\frac{1}{2}}\ dz$$

$$= 2\ \frac{z^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= 2\ \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{4}{3}\ z^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{4}{3}\ (x^2+x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

ধৰাহওক,

$$z = x^2 + x + 1$$

$$\Rightarrow dz = (2x+1)\ dx$$

(vi)

$$\int \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2}\, dx$$

$$= \int e^{\tan^{-1} x} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$= \int e^{z}\, dz$$

$$= e^{z} + C$$

$$= e^{\tan^{-1} x} + C$$

ধৰাহওক,

$$z = \tan^{-1} x$$

$$\Rightarrow dz = \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

(vii)

$$\int \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}\, dx$$

$$= \int \frac{(e^{2x} - e^{-2x})dx}{e^{2x} + e^{-2x}}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}dz}{z}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z}$$

$$= \frac{1}{2}\log z + C$$

$$= \frac{1}{2}\log(e^{2x} + e^{-2x}) + C$$

ধৰাহওক,

$$z = e^{2x} + e^{-2x}$$

$$\Rightarrow dz = \{2e^{2x} + (-2)e^{-2x}\}\, dx$$

$$\Rightarrow dz = 2\left(e^{2x} - e^{-2x}\right) dx$$

$$\Rightarrow \left(e^{2x} - e^{-2x}\right) dx = \frac{1}{2}dz$$

(viii)

$$\int \tan^2(2x-3)\, dx$$

$$= \int \tan^2 z\ \frac{1}{2}\, dz$$

$$= \frac{1}{2}\int \tan^2 z\ \ dz$$

$$= \frac{1}{2}\int (\sec^2 z - 1)\ \ dz$$

$$= \frac{1}{2}(\tan z - z) + C'$$

ধৰাহওক,

$$z = 2x - 3$$

$$\Rightarrow dz = 2\, dx$$

$$\Rightarrow dx = \frac{1}{2}\, dz$$

$$= \frac{1}{2}\{\tan(2x-3) - (2x-3\} + C'$$

$$= \frac{1}{2}\{\tan(2x-3) - 2x\} + \left(\frac{3}{2} + C'\right)$$

$$= \frac{1}{2}\{\tan(2x-3) - 2x\} + C$$ য'ত $C = \frac{3}{2} + C'$

(ix)

$$\int \cot x \ \log \sin x \ dx$$

$$= \int \log \sin x \ (\cot x \, dx)$$

$$= \int z \, d$$

$$= \frac{z^2}{2} + C$$

$$= \frac{(\log \sin x)^2}{2} + C$$

ধৰাহওক,

$$z = \log \sin x$$

$$\Rightarrow dz = \frac{1}{\sin x} \cos x \, d$$

$$\Rightarrow dz = \cot x \ dx$$

(x)

$$\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x} \ dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{\sin x / \cos x}}{\sin x \cos x} \ dx$$

$$= \int \frac{1}{\sin^{\frac{1}{2}} x \cos^{\frac{3}{2}} x} \ dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x}{\sin^{\frac{1}{2}} x \cos^{\frac{3}{2}} x \ \ \sec^2 x} \ dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x}{\sin^{\frac{1}{2}} x / \cos^{\frac{1}{2}} x} \ dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x}{\tan^{\frac{1}{2}} x} \ dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x \, dx}{\tan^{\frac{1}{2}} x}$$

$$= \int \frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{z}} \, dz$$

$$= 2\sqrt{z} + C$$

$$= 2\sqrt{\tan x} + C$$

ধৰাহওক,

$z = \tan x$

$\Rightarrow dz = \sec^2 x \; dx$