অনুকলন গণিত (Integral Calculus)

মৰমৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকল, তোমালোকে ইতিমধ্যে অৱকলজ বা অৱকলন-ৰ বিষয়ে পঢ়ি আহিছা । এই বিষয়ে অলপমান পুনৰ উল্লেখেৰে আজিৰ আলোচনা আৰম্ভ কৰিব বিচাৰিছোঁ।

যদি $y = f(x)$ এটা x-ৰ ফলন হয়, তেন্তে y-ৰ অৱকলজক আমি $\frac{dy}{dx}$ বুলি লিখোঁ। ইয়াক $f'(x)$ -ৰেও বুজোৱা হয়। যেনে- $y = x^3 + \cos x$ হ'লে $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - \sin x$। ইয়াত $\frac{dy}{dx}$ উলিয়াবলৈ যাওঁতে **অৱকলন** প্ৰক্ৰিয়াৰ সহায় লব লগা হৈছে।

এতিয়া আন এটা প্ৰক্ৰিয়াৰ বিষয়ে আমি আলোচনা কৰিবলৈ উলাইছোঁ। এই প্ৰক্ৰিয়াটোৰ নাম হৈছে **অনুকলন (Integration)**।

অৱকলনৰ বিপৰীত প্ৰক্ৰিয়াটোৱেই হৈছে অনুকলন। গতিকে অনুকলন কৰিবলৈ অৱকলনৰ বিপৰীত ধৰণে আগবাঢ়িব লাগিব। ধৰা হওক, এটা ফলন $f(x)$-ৰ অৱকলজ $g(x)$। গাণিতিকভাৱে ইয়াক লিখো- $\frac{d}{dx}f(x) = g(x)$। তেনে ক্ষেত্ৰত $g(x)$-ৰ অনুকলন হ'ব $f(x)$। আৰু গাণিতিকভাৱে ইয়াক এনেদৰে লিখা হয়- $\int g(x)dx = f(x)$। উদাহৰণ স্বৰূপে, $x^3 + \cos x$ ৰ অবকলজ $3x^2 - \sin x$। এতেকে $3x^2 - \sin x$ ৰ অনুকলন হ'ব $x^3 + \cos x$। এই কথাষাৰক এনেদৰে লিখো- $\int (3x^2 - \sin x)dx = x^3 + \cos x$

তোমালোকে মন কৰা যে ইয়াত অনুকলন বুজাবলৈ ব্যৱহাৰ কৰা সংকেত (symbol) হৈছে $\int$। ই ইংৰাজী S আখৰটোৰ দীঘলীয়া (elongated) ৰূপৰ দৰে। অনুকলন কৰিবলগীয়া ফলনটোক অনুকল্য (integrand) বুলি কোৱা হয়। অনুকল্যৰ কাষত dx লিখা হয় য'ত x হৈছে অনুকলনৰ চলক (variable of integration)।

অনুকলনীয় ধ্ৰুৱক (constant of integration) :

ধৰা হওক, এটা ফলন $f(x)$-ৰ অৱকলজ $g(x)$, অৰ্থাৎ

$$\frac{d}{dx}f(x) = g(x)$$

তেন্তে

$$\int g(x)dx = f(x)$$

আকৌ C এটা ধ্ৰুৱক হ'লে-

$$\frac{d}{dx}\{f(x) + C\} = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}C = g(x) + 0 = g(x)$$

যাতে

$$\int g(x)dx = f(x) + C$$

ইয়াৰ পৰা এইটো গম পোৱা গ'ল যে কোনো ফলনৰ অনুকলনত সদায় এটা ধ্ৰুৱক যোগ কৰিব লাগে। এই ধ্ৰুৱকটিক **অনুকলনীয় ধ্ৰুৱক** বুলি কোৱা হয়।

অনুকলনৰ সূত্ৰ:

(1) $\int \boldsymbol{x^n dx} = \frac{\boldsymbol{x^{n+1}}}{\boldsymbol{n+1}} + \boldsymbol{C}\ (\boldsymbol{n \neq -1})$

প্ৰমাণঃ আমি জানো যে,

$\frac{d}{dx}(x^{n+1}) = (n+1)x^{(n+1)-1} = (n+1)x^n$

$\Rightarrow \frac{1}{n+1}\frac{d}{dx}(x^{n+1}) = x^n$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$

$\Rightarrow \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

অনুসিদ্ধান্তঃ (i) $n = -2$ হ'লে $\int \frac{1}{x^2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$

(ii) $n = -\frac{1}{2}$ হ'লে $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$

(iii) $n = 0$ হ'লে $\int dx = x + C$

Ex: (i) $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C$

(ii) $\int x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + C = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$

(2) $\int \boldsymbol{\cos(ax+b)\, dx} = \frac{\boldsymbol{\sin(ax+b)}}{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{C}$

প্ৰমাণঃ আমি জানো যে,

$\frac{d}{dx}\sin(ax+b) = \cos(ax+b).a$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}\frac{\sin(ax+b)}{a} = \cos(ax+b)$

$\Rightarrow \int \cos(ax+b)\, dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + C$

অনুসিদ্ধান্তঃ $a = 1,\ b = 0$ হ'লে $\int cos\, x\, dx = sin\, x + C$

Ex: $\int \cos\ 4x\, dx = \frac{1}{4}\sin 4x + C$

[টোকা: সূত্ৰ (3)-(11) বিলাক তোমালোকে নিজে প্ৰমাণ কৰিবলৈ চেষ্টা কৰিবা।]

(3) $\int \boldsymbol{\sin\,(ax+b)\, dx} = -\frac{\boldsymbol{\cos\,(ax+b)}}{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{C}$

অনুসিদ্ধান্তঃ $a = 1,\ b = 0$ হ'লে $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

(4) $\int \boldsymbol{\sec(ax+b)\tan(ax+b)\, dx} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\sec(ax+b)} + \boldsymbol{C}$

অনুসিদ্ধান্তঃ $a = 1,\ b = 0$ হ'লে $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$

(5) $\int \mathbf{cosec}\,(\boldsymbol{ax+b})\,\mathbf{cot}\,(\boldsymbol{ax+b})\,\boldsymbol{dx} = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}}\mathbf{cosec}\,(\boldsymbol{ax+b}) + \boldsymbol{C}$

অনুসিদ্ধান্তঃ $a = 1,\ \ b = 0$ হ'লে $\int cosec\,x \cot x\, dx = -cosec\,x + C$

(6) $\int \boldsymbol{sec^2(ax+b)\,dx} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}}\mathbf{tan}\,(\boldsymbol{ax+b}) + \boldsymbol{C}$

অনুসিদ্ধান্তঃ $a = 1,\ \ b = 0$ হ'লে $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$

(7) $\int \boldsymbol{cosec^2(ax+b)dx} = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}}\mathbf{cot}\,(\boldsymbol{ax+b}) + \boldsymbol{C}$

অনুসিদ্ধান্তঃ $a = 1,\ \ b = 0$ হ'লে $\int \mathrm{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + C$

(8) $\int \boldsymbol{e^{ax}dx} = \frac{\boldsymbol{e^{ax}}}{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{C}$

অনুসিদ্ধান্তঃ $a = 1$ হ'লে $\int \boldsymbol{e^x dx = e^x + C}$

(9) $\int \boldsymbol{a^x dx} = \frac{\boldsymbol{a^x}}{\boldsymbol{log_e\,a}} + \boldsymbol{C}$

(10) $\int \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{log\,|x| + C}$